



Une remarque sur le prolongement par symetrie des formulations variationnelles et son application a la vectorisation

Guy Chavent

► To cite this version:

Guy Chavent. Une remarque sur le prolongement par symetrie des formulations variationnelles et son application a la vectorisation. [Rapport de recherche] RR-1015, INRIA. 1989. inria-00075543

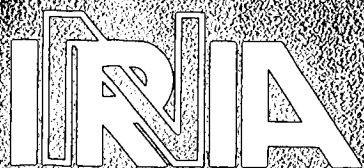
HAL Id: inria-00075543

<https://inria.hal.science/inria-00075543>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
IRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
91815 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1015

Programme 7

UNE REMARQUE SUR LE PROLONGEMENT PAR SYMETRIE DES FORMULATIONS VARIATIONNELLES ET SON APPLICATION A LA VECTORISATION

Guy CHAVENT

Avril 1989



2064

**UNE REMARQUE SUR LE PROLONGEMENT PAR SYMETRIE
DES FORMULATIONS VARIATIONNELLES
ET SON APPLICATION A LA VECTORISATION**

**A REMARK CONCERNING THE EXTENSION BY SYMMETRY
OF VARIATIONAL FUNCTIONS
AND ITS APPLICATION TO VECTORIZATION**

Guy CHAVENT

Résumé

On montre comment, dans une méthode d'éléments finis conforme sur un maillage rectangulaire, l'utilisation d'un prolongement par symétrie permet de former les équations en ne considérant que le seul cas des noeuds intérieurs. Ceci limite les risques d'erreur en simplifiant les calculs préliminaires, et permet de vectoriser efficacement les calculs dans des boucles dont la longueur est liée au nombre de points du maillage. Un exemple d'application à un simulateur acoustique est donné.

Abstract

We demonstrate how the use of a continuation by symmetry in a conforming finite element method on a rectangular grid allows for constructing the discretized equation by considering only interior points. This lowers the risk of making errors as the preliminary calculations are simplified, and allows for an efficient vectorization of the code as the loop size is now the total number of grid nodes. An example of application to an acoustic simulator is given.

Mots clés

Eléments finis conformes, vectorisation.

Keywords

Conforming finite elements, vectorization.

P L A N

1. POSITION DU PROBLEME
2. PROLONGEMENT PAR SYMETRIE
3. FORMATION DES EQUATIONS DISCRETES
4. APPLICATION A LA VECTORISATION D'UN MODELE ACOUSTIQUE
5. CONCLUSION

1. POSITION DU PROBLEME

On considère un domaine rectangulaire $\Omega =]0, L[x]0, Z[$ de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ (figure 1.1),

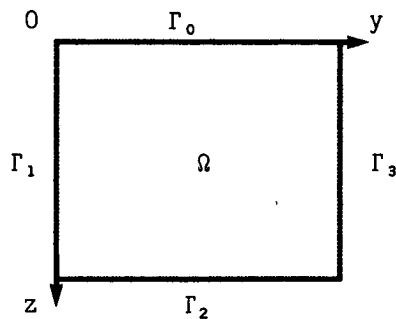


Figure 1.1 : Le domaine Ω

les espaces fonctionnels :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} V &= H^1(\Omega) \\ V_0 &= \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}, \end{aligned}$$

la forme bilinéaire :

$$(1.2) \quad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\Omega} a_0 v \quad \forall u, v \in V_0$$

et la forme linéaire

$$(1.3) \quad L(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma - \Gamma_0} g v \quad \forall v \in V_0$$

où :

$$a_0, a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$$

$$(1.4) \quad f \in L^2(\Omega)$$

$$g \in L^2(\Gamma - \Gamma_0)$$

En vue de résoudre des problèmes variationnels faisant intervenir des formes bilinéaires du type de $a(u,v)$ et des formes linéaires du type de $L(v)$ définis sur V_0 , on recouvre Ω par un maillage rectangulaire non nécessairement uniforme \mathcal{T}_h (figure 1.2), et on approche les espaces V et V_0 .

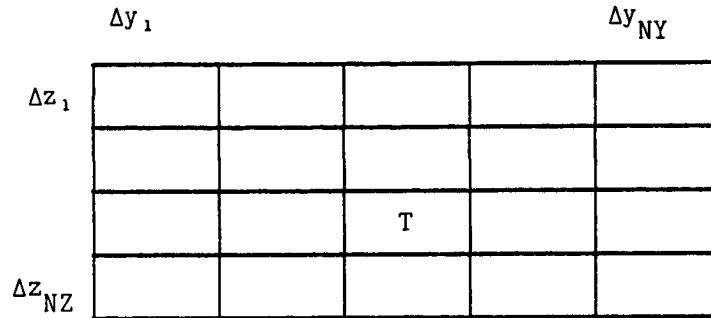


Figure 1.2 : le maillage recouvrant Ω

par les sous espaces de dimension finie

$$(1.5) \quad V_h = \{v_h \in \bar{C}(\Omega) \mid v_h|_T \in Q^1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

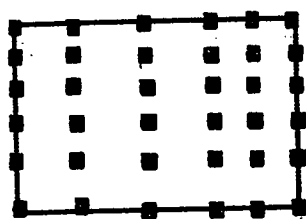
$$V_{0h} = \{v_h \in V_h \mid v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$$

Si l'on dénote par Ω_h l'ensemble des noeuds de \mathcal{T}_h et par Ω_{0h} le sous ensemble de Ω_h formé des noeuds situés à une profondeur $z > 0$ (figure 1.3), on sait bien que

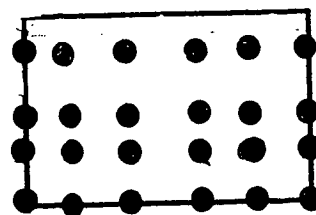
$$(1.6) \quad \dim V_h = \text{card } \Omega_h$$

$$\dim V_{0h} = \text{card } \Omega_{0h}$$

Si l'on munit enfin V_h (resp V_{0h}) de la



$$\Omega_h = \{\blacksquare\}$$



$$\Omega_{oh} = \{\bullet\}$$

Figure 1.3 : Les réseaux Ω_h et Ω_{oh}

base usuelle :

$$(1.7) \quad \phi_M, M \in \Omega_h \text{ (resp } \Omega_{oh})$$

définie par

$$(1.8) \quad \phi_M(P) = \delta_{MP} \in \forall M, P \in \Omega_h \text{ (resp } \Omega_{oh}),$$

la résolution d'un problème variationnel posé dans V_{oh} avec $a(u,v)$ et $L(v)$ nécessite la formation des matrices et seconds membre correspondant, c'est à dire l'évaluation, sur le papier puis sur l'ordinateur, des quantités $a(\phi_P, \phi_M)$ et $L(\phi_M)$. Les calculs sont différents, suivant que le point M est un point intérieur, frontière ou coin de Ω_{oh} (ce qui est une source d'erreur car il faut recommencer des calculs semblables et ennuyeux dans au moins six cas différents), et les équations résultant sont différentes (ce qui est un obstacle à une vectorisation efficace, car on ne peut ainsi vectoriser que sur une ligne ou une colonne du maillage).

A l'origine de ce travail est une remarque remontant à l'aube de l'introduction des formulations variationnelles en analyse numérique, et concernant l'interprétation de la condition aux limites de Neuman fournie par la formulation variationnelle à l'aide de points fictifs extérieurs à Ω ; le développement de cette remarque va nous permettre de n'avoir à faire, pour la formation de la matrice, que des calculs en des "points intérieurs" (et donc minimiser les risques d'erreur), et de vectoriser les calculs (dans le cas explicite) sur l'ensemble du maillage, (ce qui aura pour effet de simplifier la programmation, et d'augmenter l'efficacité de la vectorisation).

2. PROLONGEMENT PAR SYMETRIE

L'objectif de ce paragraphe est de calculer, pour $u \in V_0$ donnée, les quantités $a(u, \phi_M)$ et $L(\phi_M)$ pour tout $M \in \Omega_{0h}$ à l'aide de calculs n'utilisant que des "noeuds intérieurs".

On commence pour cela par inclure Ω dans un domaine rectangulaire $\tilde{\Omega}$ en bordant Ω , le long de Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , d'une bande supplémentaire dont la largeur est égale à celle du maillage jouxtant la frontière correspondant (figure 2.1). On prolonge de même les frontières Γ_j $j = 0, 1, 2, 3$ de Ω en $\tilde{\Gamma}_j$ $j = 0, 1, 2, 3$ comme indiqué sur la figure 2.2, et on pose :

$$(2.1) \quad \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_3$$

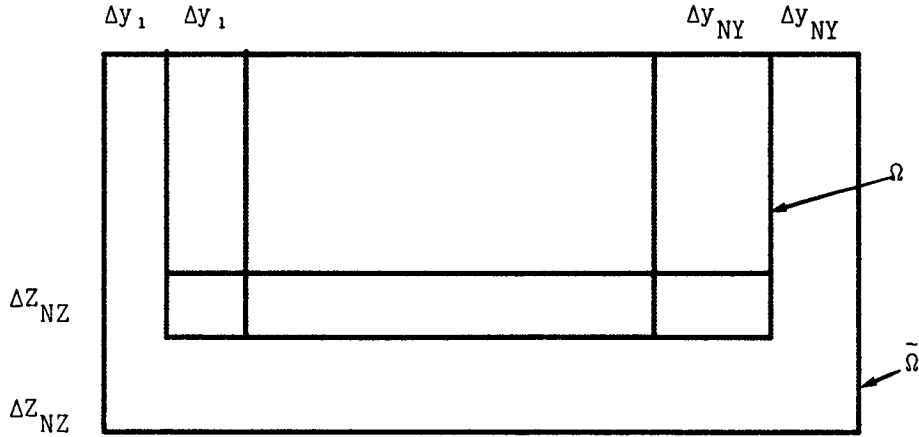


Figure 2.1 : le domaine prolongé Ω

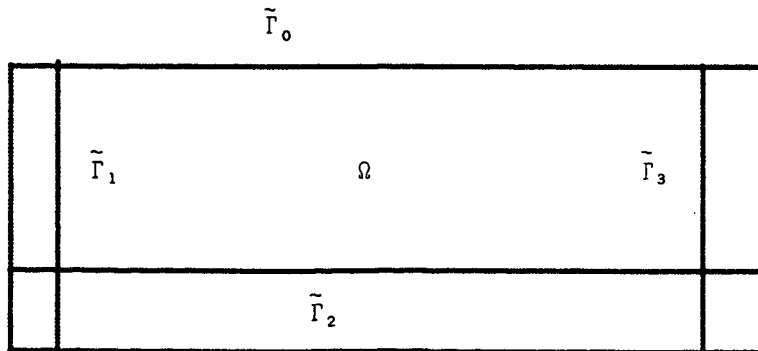


Figure 2.2 : les frontières prolongées $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_0 \cup \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_3$

On prolonge ensuite toute fonction définie sur Ω en une fonction définie sur $\tilde{\Omega}$ par symétrie par rapport à Γ_1 et Γ_3 , composée avec une symétrie par rapport à Γ_2 (où ce qui revient au même, par symétrie par rapport à Γ_2 , composée avec deux symétries par rapport à $\tilde{\Gamma}_1$ et $\tilde{\Gamma}_3$). On note par \tilde{V} , \tilde{V}_0 , \tilde{V}_h , \tilde{V}_{0h} les images de V , V_0 , V_h , V_{0h} par cet opérateur de prolongement.

Ces espaces se caractérisent facilement ; par exemple :

$$(2.2) \quad \tilde{V} = \{v \in H^1(\tilde{\Omega}) \mid v \text{ symétrique par rapport à } \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2, \tilde{\Gamma}_3\}$$

$$(2.3) \quad \tilde{V}_0 = \{v \in \tilde{V} \mid v|_{\tilde{\Gamma}_0} = 0\}$$

$$(2.4) \quad \tilde{V}_h = \{v_h \in \tilde{V} \mid v_h|_{\Omega} \in V_h\}$$

$$(2.5) \quad \tilde{V}_{0h} = \{v_h \in \tilde{V} \mid v_h|_{\Omega} \in V_{0h}\} = \{v_h \in \tilde{V}_h \mid v_h|_{\tilde{\Gamma}_0} = 0\}.$$

Le même prolongement par symétrie permet de prolonger toute fonction définie sur Γ en une fonction définie sur $\tilde{\Gamma}$.

On peut alors utiliser cet opérateur de prolongement pour étendre $a(u,v)$, définie sur $V \times V$ en $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v})$ définie sur $\tilde{V} \times \tilde{V}$:

$$(2.6) \quad \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} + \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{a}_0 \tilde{u} \tilde{v} \quad \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$$

où

$$(2.7) \quad \tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_0 \text{ sont les prolongés par symétrie de } a_{ij} \text{ et } a_0.$$

On peut de même étendre $L(v)$, définie sur V , en $\tilde{L}(\tilde{v})$, définie sur \tilde{V} , par (attention au facteur 2)

$$(2.8) \quad \tilde{L}(\tilde{v}) = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f} \tilde{v} + 2 \int_{\tilde{\Gamma}-\tilde{\Gamma}_0} \tilde{g} \tilde{v} \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

où

(2.9) \tilde{f} et \tilde{g} sont les prolongés par symétrie de f et g .

Nous allons calculer $a(u, \phi_M)$ en fonction de $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{\phi}_M)$ et $L(\phi_M)$ en fonction de $\tilde{L}(\tilde{\phi}_M)$ pour tous les points $M \in \Omega_{0h}$. En comparant les figures 1.3 et 2.1 ou 2.2, on voit que tous les points $M \in \Omega_{0h}$ sont intérieurs à $\tilde{\Omega}$ et à $\tilde{\Gamma}$, de sorte que le calcul de $\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{\phi}_M)$ et $\tilde{L}(\tilde{\phi}_M)$ revêtira la même forme quel que soit la position (intérieur, frontière, coin) du point M dans Ω_{0h} .

Partitionnons donc Ω_{0h} en ses points intérieurs $\overset{\circ}{\Omega}_h$, ses points frontières Γ_{1h} , Γ_{2h} , Γ_{3h} et ses coins C_2 et C_3 (figure 2.3), et associons à chaque point de Ω_{0h} un poids w_M défini par

$$(2.10) \quad w_M = \begin{aligned} &1 \quad \text{aux noeuds intérieurs } M \in \overset{\circ}{\Omega}_h \\ &\frac{1}{2} \quad \text{aux noeuds frontières } M \in \Gamma_{1h} \cup \Gamma_{2h} \cup \Gamma_{3h} \\ &\frac{1}{4} \quad \text{aux noeuds coins } M = C_2 \text{ et } M = C_3 \end{aligned}$$

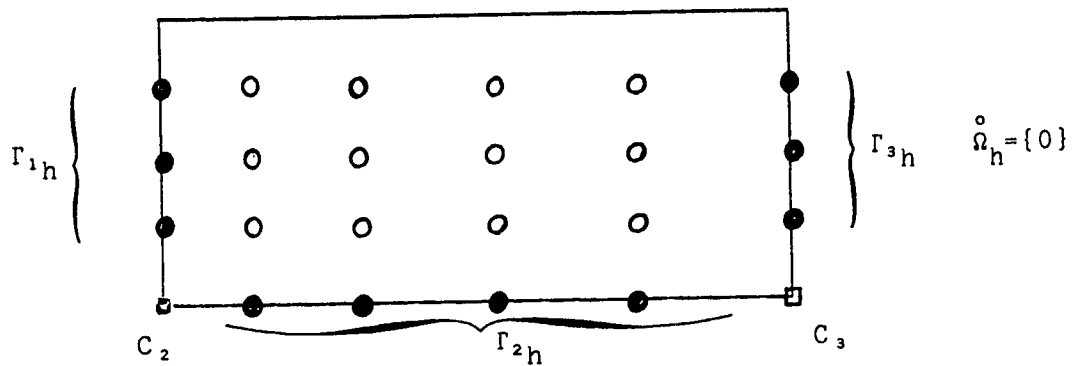


Figure 2.3 : Partition de Ω_h en points intérieurs $\overset{\circ}{\Omega}_h$, frontière $\Gamma_{1h} \cup \Gamma_{2h} \cup \Gamma_{3h}$ et coins $C_2 \cup C_3$.

Calcul de $a(u, \phi_M)$, $M \in \Omega_{0h}$:

i) en un point intérieur $M \in \overset{\circ}{\Omega}_h$:

$$a(u, \phi_M) = \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{\phi}_M)$$

car $u \equiv \tilde{u}$ sur le support de ϕ_M

ii) en un point frontière $M \in \Gamma_{1h}$:

$$a(u, \phi_M) = \frac{1}{2} \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{\phi}_M)$$

car \tilde{u} et $\tilde{\phi}_M$ sont symétriques par rapport à Γ_1

iii) de même en un point de Γ_{2h} ou Γ_{3h} .

iv) en un coin $M = C_1$ ou C_2 :

$$a(u, \phi_M) = \frac{1}{4} \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{\phi}_M)$$

car \tilde{u} et $\tilde{\phi}_M$ sont symétriques par rapport à Γ_1 et Γ_2 (resp Γ_2 et Γ_3)

on trouve donc dans tous les cas :

$$(2.11) \quad a(u, \phi_M) = w_M \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{\phi}_M) \quad \forall M \in \Omega_{Oh}$$

Calcul de $L(\phi_M)$, $M \in \Omega_{Oh}$

a) on a de même que ci-dessus :

$$(2.12) \quad \int_{\Omega} f \phi_M = w_M \int_{\Omega} \tilde{f} \tilde{\phi}_M \quad \forall M \in \Omega_{Oh}$$

b) considérons maintenant le terme frontière, qui n'est non nul que si $M \in \partial\Omega_{Oh} = \Gamma_{1h} \cup \{C_2\} \cup \Gamma_{2h} \cup \{C_3\} \cup \Gamma_{3h}$:

i) en un point $M \in \Gamma_{1h}$ on a (figure 2.4-a) :

$$\int_{\Gamma} g \phi_M = \int_{[U,D]} g \phi_M = \int_{\tilde{\Gamma}_1} \tilde{g} \tilde{\phi}_M = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{g} \tilde{\phi}_M$$

ii) En un coin $M = C_2$ on a (figure 2.4-b) :

$$\int_{\Gamma} g \phi_M = \int_{[UM]} g \phi_M + \int_{[MR]} g \phi_M$$

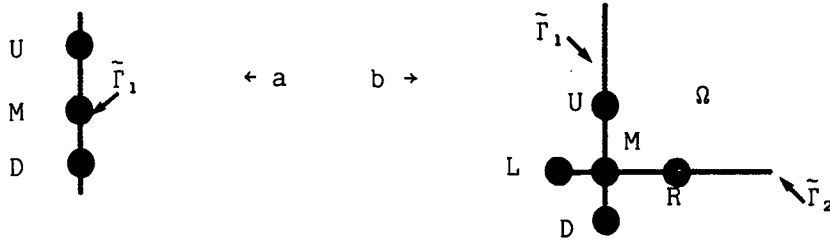


Figure 2.4 calcul du terme frontière

Mais \tilde{g} et $\tilde{\phi}_M$ sont, sur Γ_1 , symétriques par rapport à M. donc :

$$\int_{[UM]} g\phi_M = \frac{1}{2} \int_{[UD]} \tilde{g}\tilde{\phi}_M = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \tilde{g}\tilde{\phi}_M$$

De même :

$$\int_{[MR]} g\phi_M = \frac{1}{2} \int_{[LR]} \tilde{g}\tilde{\phi}_M = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \tilde{g}\tilde{\phi}_M$$

D'où :

$$\int_{\Gamma} g\phi_M = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_1} \tilde{g}\tilde{\phi}_M + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}_2} \tilde{g}\tilde{\phi}_M = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{g}\tilde{\phi}_M$$

On trouve donc dans tous les cas que :

$$(2.13) \quad \int_{\Gamma} g\phi_M = 2W_M \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{g}\tilde{\phi}_M \quad \forall M \in \Omega_{oh}$$

D'où, en utilisant la définition (2.8) de $\tilde{L}(\tilde{v})$:

$$(2.14) \quad L(\phi_M) = W_M \tilde{L}(\tilde{\phi}_M) \quad \forall M \in \Omega_{oh}$$

Conclusion : comme le même poids W_M est en facteur dans les formes bilinéaires et les formes linéaires, les équations pourront se former en utilisant partout \tilde{a} et \tilde{L} au lieu de a et L .

3. FORMATION DES EQUATIONS DISCRETES

On supposera désormais que les coefficients et second membres sont des fonctions continues :

$$(3.1) \quad a_{ij}, a_0, f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad g \in \mathcal{C}(\Gamma);$$

On suppose aussi pour simplifier la présentation que le maillage est uniforme, avec les pas.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Delta y &= L/N_y = \text{épaisseur des mailles dans la direction } Oy \\ \Delta z &= Z/N_z = \text{épaisseur des mailles dans la direction } Oz \end{aligned}$$

mais les résultats restant valable avec un maillage irrégulier. On décide enfin d'approcher les intégrales sur $\bar{\Omega}$ et un $\bar{\Gamma}$ par :

$$(3.3) \quad \int_{\bar{\Omega}} \psi \approx \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [[\psi]]_T$$

$$(3.4) \quad \int_{\bar{\Gamma}} \psi \approx \sum_{A \in \partial \mathcal{T}_h} [\psi]_A$$

où :

$$(3.5) \quad [[\psi]]_T = \frac{\Delta y \Delta z}{4} \sum_{M=\text{sommet de } T} \psi(M)$$

$$(3.6) \quad [\psi]_A = \begin{cases} \frac{\Delta z}{2} \sum_{M=\text{extrémité de } A} \psi(M) & \text{si } A \text{ est une arête verticale} \\ \frac{\Delta y}{2} \sum_{M=\text{extrémité de } A} \psi(M) & \text{si } A \text{ est une arête horizontale} \end{cases}$$

et où \mathcal{T}_h représente l'ensemble des éléments recouvrant $\bar{\Omega}$ et où $\partial \mathcal{T}_h$ représente l'ensemble des arêtes recouvrant $\bar{\Gamma}$ (voir figure 3.1).

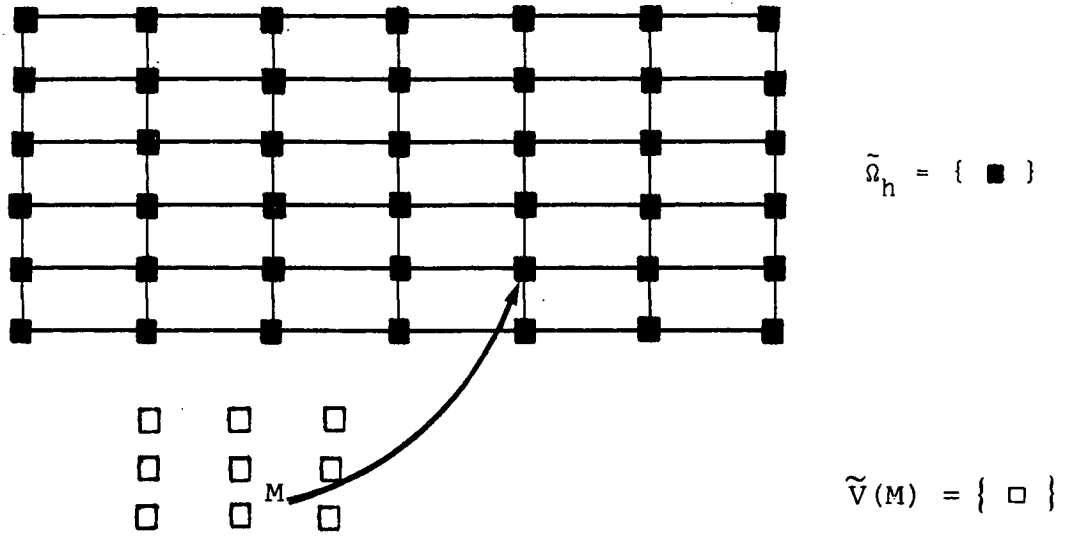


Figure 3.2 Le réseau $\tilde{\Omega}_h$ et les voisins $\tilde{V}(M)$ de $M \in \Omega_{oh}$.

où les coefficients α_{PM} s'obtiennent par un calcul classique, du type "point intérieur", et, avec les notations de la figure 2.3, par :

$$(3.10) \quad \tilde{L}(\tilde{\phi}_M) = \Delta y \Delta z f(M) + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } M \in \overset{\circ}{\Omega}_k \\ 2\Delta z g(M) & \text{si } M \in \Gamma_{1h} \text{ ou } \Gamma_{3h} \\ 2\Delta z g(M) + 2\Delta y g(M) & \text{si } M = C_2 \text{ ou } C_3 \\ 2\Delta y g(M) & \text{si } M \in \Gamma_{2h} \end{array} \right.$$

où l'on constate encore que le terme sur le bord est donné toujours par la même formule à condition de compter deux fois chaque coin, une fois dans la frontière verticale et une fois dans la frontière horizontale.

On peut tirer avantage des formules (3.9) et (3.10) pour la vectorisation de la façon suivante.

On commence par numéroté en séquence (figure 3.3) de 1 à NPT (Nombre de Points Total) tous les noeuds du réseau $\tilde{\Omega}_h$ (ligne par ligne par exemple), et on note par

$$(3.11) \quad [IDEB, IFIN] \text{ l'intervalle le plus petit contenant tous les noeuds de } \Omega_{oh}$$

On numérote ensuite les points de $\partial\Omega_{oh}$ (figure 3.4) de 1 à NPF (Nombre de Points Frontière) en comptant trois fois les coins C_2 et C_3 , de sorte que, à chaque indice $j \in \{1 \dots NPF\}$ est associée une et une seule des frontières $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_3$, ou, pour un des 3 points "coins", une frontière "fictive" $\bar{\Gamma}_4$.

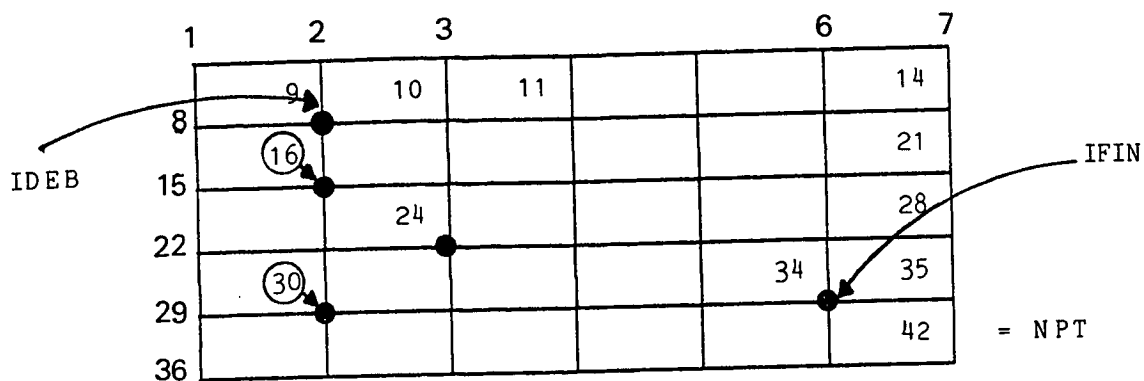


Figure 3.3 : Numérotation de $\tilde{\Omega}_h$.

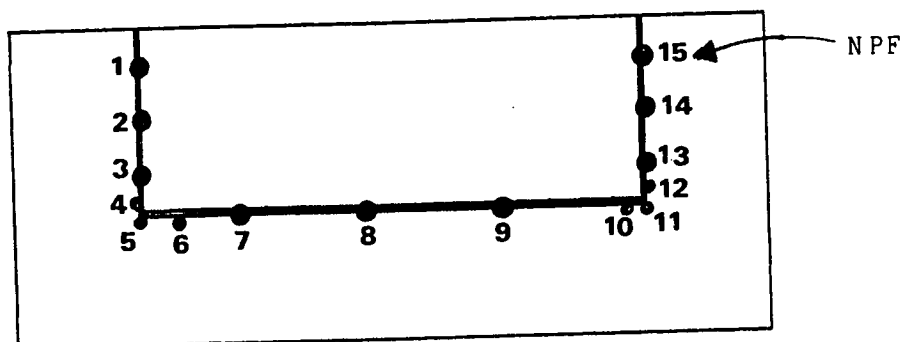


Figure 3.4 : Numérotation de $\partial\Omega_{oh} = \Gamma_{1h} \cup C_2 \cup \Gamma_{2h} \cup C_3 \cup \Gamma_{3h}$.

A chaque frontière $\bar{\Gamma}_\ell$, $\ell = 1, 2, 3, 4$ est associé un pas de discrétisation Δ_ℓ donné par :

$$(3.12) \quad \Delta_\ell = \begin{cases} \Delta z & \ell = 1 \text{ et } 3 \\ \Delta y & \ell = 2 \\ 0 & \ell = 4 \end{cases}$$

Pour tout $j \in \{1, 2 \dots NPF\}$ on notera (figure 3.5)

$\ell(j) \in \{1, 2, 3, 4\}$ numéro de la frontière $\bar{\Gamma}_{\ell(j)}$ associé au j -ième noeud frontière.

$i(j) \in \{1 \dots NPT\}$ = numéro, dans $\tilde{\Omega}_h$, du j -ième noeud frontière.

$$(3.13) \quad i \text{ int}(j) \in \{1 \dots NPT\} = \text{numéro, dans } \tilde{\Omega}_h, \text{ du noeud de } \Omega_h \text{ le plus proche du noeud } i(j) \text{ sur la normale à la frontière } \bar{\Gamma}_{\ell(j)}$$

$i \text{ ext}(j) \in \{1 \dots NPT\}$ = numéro, dans $\tilde{\Omega}_h$, du noeud fictif symétrique du noeud $i \text{ int}(j)$ par rapport au noeud $i(j)$.

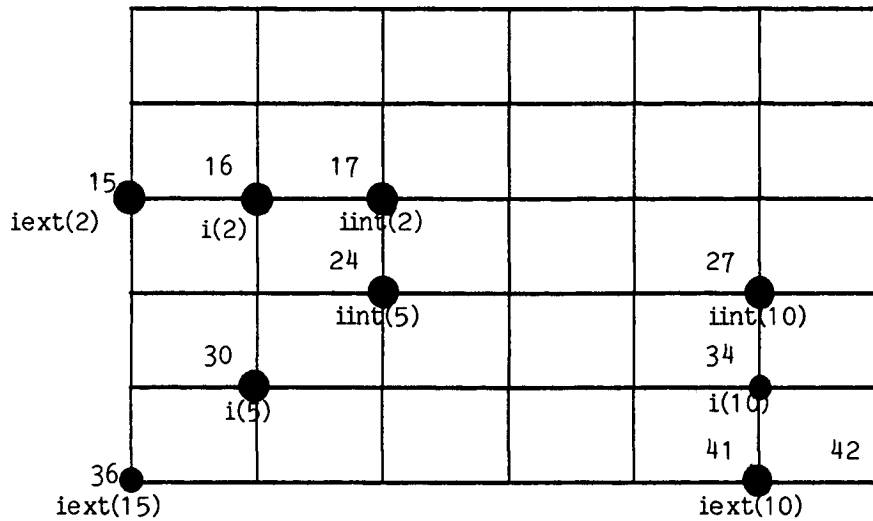


Figure 3.5 : les voisins "intérieurs" et "extérieurs" des points frontière.

Ainsi, la formulation de la matrice pourra se faire à l'aide de deux boucles :

i) une boucle sur le maillage (vectorisable) :

FAIRE DE I = IDEB à IFIN

calcul des coefficients α_{PM} dans (3.9) pour $M = I$ - ième noeud et $P \in \tilde{V}(M)$
calcul de $f(M)$ dans (3.10)

FIN

ii) une boucle sur la frontière (non vectorisable) :

FAIRE DE J = I à NPF

calcul du terme frontière dans (3.10) : $2\Delta_{\ell(J)} g(M)$ pour $M = i(J)$ ième noeud.

FIN

Ensuite, la résolution de l'équation se fera aussi en utilisant ces deux types de boucles (voir un exemple au paragraphe 4).

4. APPLICATION A LA VECTORISATION D'UN MODELE ACOUSTIQUE

On considère le modèle acoustique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{v}{\sigma} \nabla u \right) &= f && \text{dans } \Omega \times]0T[\\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_0 \end{aligned}$$

(4.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial h} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ v = \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 \quad \text{à } t = 0 \end{aligned}$$

où les coefficients σ (impédance) et v (vitesse) sont continus sur $\bar{\Omega}$, et où f est continue un $\bar{\Omega} \times [0T]$. Le problème (4.1) se met sous la forme variationnelle

$$\begin{aligned} \text{trouver } u : [0T] \quad V_0 \text{ tel que} \\ (4.2) \quad m\left(\frac{d^2 u}{dt^2}, \phi\right) + a(u, \phi) + b\left(-\frac{du}{dt}, \phi\right) &= (f, \phi) \quad \forall \phi \in V_0, \quad \forall t \in [0T] \\ u(0) = \frac{du}{dt}(0) &= 0 \end{aligned}$$

où les formes bilinéaires m, a et b sont définies par

$$\begin{aligned} m(u, \phi) &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma v} u \phi \\ (4.3) \quad a(u, \phi) &= \int_{\Omega} \frac{v}{\sigma} \nabla u \cdot \nabla \phi \\ b(u, \phi) &= \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} u \phi \end{aligned}$$

On approche de façon classique (4.2) par des éléments finis Q_1 avec intégration numérique, définis aux paragraphes précédents, et par une discrétisation du type différence finie explicite en temps. Notons :

$$(4.4) \quad \Delta t = T/NT \quad t^k = k\Delta t \quad k = 0, 1, \dots, NT$$

On choisit alors d'approcher (4.2) par :

trouver $u_h = (u_h^0, u_h^1, \dots, u_h^{NT}) \in V_{0h}^{NT+1}$ tel que

$$(4.5) \quad m\left(\frac{u_h^{k+1} - 2u_h^k + u_h^{k-1}}{\Delta t^2}, \phi_h\right) + a(u_h^k, \phi_h) + b\left(\frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\Delta t}, \phi_h\right) = (f^k, \phi_h) \\ \forall \phi_h \in V_{0h} \quad \forall k=1, 2, \dots, NT-1 \\ u_h^0 = u_h^1 = 0$$

où toutes les intégrales sont calculées à l'aide des formules de quadrature indiquées au paragraphe 3.

En utilisant l'opération de prolongement et les résultats du paragraphe 2, et en prenant comme fonctions test les fonctions de base ϕ_M de V_{0h} , il vient, après division de chaque équation par le poids W_M :

trouver $u_h = (u_h^0, u_h^1, \dots, u_h^{NT}) \in V_{0h}^{NT+1}$ tel que

$$(4.6) \quad \tilde{m}\left(\frac{\tilde{u}_h^{k+1} - 2\tilde{u}_h^k + \tilde{u}_h^{k-1}}{\Delta t^2}, \tilde{\phi}_M\right) + \tilde{a}(\tilde{u}_h^k, \tilde{\phi}_M) + \tilde{b}\left(\frac{\tilde{u}_h^k - \tilde{u}_h^{k-1}}{\Delta t}, \tilde{\phi}_M\right) = \int_{\Omega} \tilde{f}^k \tilde{\phi}_M \\ \forall M \in \Omega_{0h}, \quad \forall k=1 \dots NT-1 \\ \tilde{u}_h^0 = \tilde{u}_h^1 = 0$$

On notera par

$$(4.7) \quad U^k \text{ (resp } \tilde{U}^k) \text{ le vecteur des composantes de } u_h^k \text{ sur la base } \phi_M \text{ de } V_h \\ \text{(resp } \tilde{V}_h)$$

Un calcul classique donne :

$$\tilde{m}\left(\frac{\tilde{u}_h^{k+1} - 2\tilde{u}_h^k + \tilde{u}_h^{k-1}}{\Delta t^2}, \tilde{\phi}_M\right) = \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta t^2} \sigma_M v_M (U_M^{k+1} - 2U_M^k + U_M^{k-1}) \\ \tilde{a}(\tilde{u}_h^k, \tilde{\phi}_M) = \sum_{P \in \{M, U, R, D, L\}} \tilde{V}_P^k \tilde{a}(\tilde{\phi}_P, \tilde{\phi}_M)$$

(où on a noté par U,R,D,L les voisins supérieur, droit, inférieur et gauche de M dans $\tilde{\Omega}_h$), avec

$$\tilde{a}(\tilde{\phi}_M, \tilde{\phi}_M) = - \sum_{P \in \{U,R,D,L\}} \tilde{a}(\tilde{\phi}_P, \tilde{\phi}_M)$$

$$\tilde{a}(\tilde{\phi}_R, \tilde{\phi}_M) = - \Delta y \Delta z \left(\frac{v_M / \sigma_M + \tilde{v}_R / \tilde{\sigma}_R}{2 \Delta y^2} \right)$$

$$\tilde{a}(\tilde{\phi}_D, \tilde{\phi}_M) = \text{etc...}$$

$$\tilde{b}\left(\frac{\tilde{u}_h^k - \tilde{u}_h^{k-1}}{\Delta t}, \tilde{\phi}_M\right) = 2 \sum_{\ell \in \text{t.q. } \Gamma_\ell \ni M} \frac{\Delta_\ell}{\sigma_M} \frac{U_M^k - U_M^{k-1}}{\Delta t}$$

(d'après (3.10) et (3.12))

$$\int_{\tilde{\Omega}} f^k \tilde{\phi}_M = \Delta y \Delta z f_M^k$$

En reportant ces valeurs dans (4.6) il vient, après division par $\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta t^2} \sigma_M v_M$ et en réarrangeant les termes :

$$\begin{aligned} (4.8) \quad U_M^{k+1} &= 2U_M^k - U_M^{k-1} && \text{(boucle maillage)} \\ &- \sum_{P \in \{U,R,D,L\}} C_{P,M} \{V_M^k - \tilde{V}_P^k\} && \text{(boucle maillage)} \\ &+ \Delta t^2 \sigma_M v_M f_M^k && \text{(boucle source)} \\ &- \sum_{\ell \in \text{t.q. } \Gamma_\ell \ni M} C_{F,M,\ell} \{V_M^k - V_M^{k-1}\} && \text{(boucle frontière)} \end{aligned}$$

$$\forall M \in \Omega_{0h},$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
 CU_M &= \Delta t^2 \sigma_M v_M \frac{v_M/\sigma_M + \tilde{v}_U/\tilde{\sigma}_U}{2\Delta z^2} \\
 CR_M &= \Delta t^2 \sigma_M v_M \frac{v_M/\sigma_M + \tilde{v}_R/\tilde{\sigma}_R}{2\Delta z^2} \\
 CD_M &= \Delta t^2 \sigma_M v_M \frac{v_M/\sigma_M + \tilde{v}_D/\tilde{\sigma}_D}{2\Delta z^2} \\
 CL_M &= \Delta t^2 \sigma_M v_M \frac{v_M/\sigma_M + \tilde{v}_L/\tilde{\sigma}_L}{2\Delta z^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

et pour tout point frontière M et chaque frontière Γ_ℓ le contenant :

$$CF_{M,\ell} = 2 \Delta t \frac{\Delta_\ell}{\Delta y \Delta z} \frac{1}{\sigma_M} \quad (\Delta_\ell \text{ défini en (3.12)})
 \tag{4.10}$$

et où l'on a indiqué, pour chaque terme du second membre, le type de boucle à utiliser pour le calculer. L'équation (4.8) permet de calculer U_M^{k+1} en tous les points M de Ω_{oh} . Il faudra donc, à la fin de la boucle frontière, qui devra être nécessairement la dernière, définir \tilde{U}_M^{k+1} en tous les points fictifs afin de préparer le prochain pas de temps.

L'organisation informatique résulte directement de la considération de (4.8).

Avec les numérotations et tableaux d'indices définis au paragraphe 3, les voisins {URDL} du point M (d'indice I) sont donnés par (cf. (3.2)) :

$$\begin{aligned}
 U &\longrightarrow I - NY - 3 \\
 R &\longrightarrow I + 1 \\
 D &\longrightarrow I + NY + 3 \\
 L &\longrightarrow I - 1
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

La solution U^k et U^{k-1} ou U^{k+1} sera stockée dans un tableau à deux indices $U(I,K)$, de dimension $NPT \times 2$; on utilisera l'indice KPR (K PRésent) (resp. KAN (K Ancien ou Nouveau)), prenant les valeurs 1 ou 2, pour indiquer dans lequel des deux tableaux $V(I,1)$ ou $(VI,2)$ se trouve stocké U^k (resp. U^{k-1} ou U^{k+1}). Enfin, en vue du calcul du terme de dissipation dans la boucle frontière, on stockera dans un tableau UFRONT(J), de dimension NPF, les valeurs de U^{k-1} qui seront écrasées au cours de la boucle maillage principale.

L'organisation du programme pourrait être la suivante :

Préparation des Données et des Coefficients

. Construction de tableaux à un indice SIG(I) et VIT(I) de dimension NPT contenant l'impédance $\tilde{\sigma}$ et la vitesse \tilde{v} prolongées par symétrie :

- une boucle à 2 indices sur tous les points de Ω_h remplit ces tableaux pour tous les indices I correspondant à des noeuds réels,
- une boucle frontière affecte aux points fictifs les valeurs obtenues par symétrie,
- un calcul direct donne les valeurs en $I=1$ et $I=NY+3$.

. Construction des coefficients pour la boucle maillage :

- une boucle maillage $I=IDEB$ à $IFIN$ remplit les tableaux $CU(I)$, $CR(I)$, $CD(I)$, $CL(I)$, de dimension NPT, avec les coefficients CU_M , CR_M , CD_M et CL_M définis en (4.9) à partir des tableaux $SIG(I)$, $VIT(I)$ et de (4.11).
- Remarque : cette boucle est complètement vectorisable ; on y calcule aussi des coefficients $CU(I)$, $CR(I)$, $CD(I)$ et $CL(I)$ pour des indices I correspondant à des points fictifs. Ces valeurs sont naturellement non significatives. Elles seront utilisées au cours de la boucle maillage principale pour calculer des valeurs de la pression, naturellement non significatives, en ces points fictifs à l'instant $k+1$; ces valeurs seront écrasées, au cours de la boucle frontière, par les valeurs significatives obtenues par symétrie par rapport à la frontière.

. Préparation de la source

Préparer une structure informatique permettant de :

- déterminer, à un instant k donné, si la source est active ou non,
- balayer les noeuds $I \in [IDEB, IFIN]$ sur lesquels la source est active et de calculer le second membre f_i^k correspondant.

Construction des coefficients pour la boucle frontière :

- une boucle frontière $J=1$ à NPF remplit le tableau $CF(J)$ avec les coefficients $CF_{M,\ell}$ définis en (4.10).
- Remarque : comme dans $CF(J)$ les coins sont comptés 3 fois, à chaque J ne correspond qu'une seule frontière Γ_ℓ de sorte qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le coefficient $CF_{M,\ell}$ à mettre dans $CF(J)$. Le fait d'avoir compté les coins 3 fois (au lieu de 2) et donc d'avoir associé chaque coin à une frontière fictive $\tilde{\Gamma}_\ell$ avec un pas de discrétisation $\Delta_\ell = 0$ ne sert qu'à permettre de définir par symétrie la valeur au noeud M qui forme le coin du maillage $\tilde{\Omega}_h$ (on pourrait s'en passer ici puisqu'on n'utilise qu'un schéma à 5 points).

Initialisation

KPR=1

KAN=2

Faire pour $I=1$ à NPT

```

|
|      U(I,KPR) = 0
|      U(I,KAN)=0
|
Fin
```

Faire pour $J=1$ à NPF

```

|
|      UFRONT(J)=U(i(J), KPR)
|
Fin
```


Boucle en temps

Faire pour K=1 à NT

T
E
M
P
S

```

. Boucle maillage (vectorisée)

Faire pour I=IDEB à IFIN

    UU = U(I,KPR)
    DUU = UU - U(I-NY-3, KPR)
    DUR = UU - U(I+1, KPR)
    DUD = UU - U(I+NY+3, KPR)
    DUL = UU - U(I-1, KPR)

    U(I,KAN) = 2*U(I,KPR) - U(I,KAN)
              - CU(I)*DUU - CR(I)*DUR
              - CD(I)*DUD - CL(I)*DUL

Fin

. Boucle source :

Si la source est active à l'instant k, balayer les indices I ∈
[IDEB,IFIN] où la source est active, et pour chacun de ces indices,
faire

U(I,KAN) = U(I,KAN) + Δt2*SIG(I)*VIT(I)*fIk

```

. Boucle frontière

Faire pour J=I à NPF

Calcul du terme de dissipation :

I = i(J)

U(I,KAN) = U(I,KAN)

- CF(J)*(U(I,KPR)-UFRONT(J))

Prolongement par symétrie (cf. (3.13)) :

U(iext(J),KAN) = U(int(J),KAN)

stockage du \tilde{U}^{+1} dans UFRONT :UFRONT(J) = U(I,KAN)

Fin

. Echange du pas de temps

Echanger les valeurs de KPR et KAN

. A' cet endroit, on trouve \tilde{U}^K dans le tableau U(I,KAN) et \tilde{U}^{K+1} dans le tableau U(I,KPR)

Fin

Fin du programme

5. CONCLUSION

On a montré comment l'utilisation du prolongement par symétrie permettait de limiter les risques d'erreurs de calcul en simplifiant les calculs préliminaires à la mise en oeuvre numérique d'une méthode variationnelle, vectoriser les calculs dans des boucles dont la longueur est liée au nombre de points du maillage, indépendamment de sa dimension.

Un exemple d'application à un simulateur acoustique a été donné.

Des expériences numériques sont en cours pour quantifier le gain en temps de calcul correspondant.

